71. 重心ノ characterization

（阪大）　石 原　忠 重

「平面及空間図形ノ重心ヲ characterize 出来ナイカ？」ト云フ寺阪先生ノ問題ヲ同先生ノ御教示ヲ受ケナガラ考ヘテ見タ．直線図形ニ関シテハ一応ノ結果ヲ得タノデ報告スル．

以下図形 ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ....) ハスベテ有界ナ且密度一様ナ図形デアリ $m(\mathfrak{a})$, $m(\mathfrak{b})$ ... ハソノ重心ヲ表ハス. 又 $\equiv$ ハ合同, $a \frown b$ ハ点 a 及ビ b ヲ結ブ直線, $a - b$ ハ直線 a 及 b ノ交点トスル.

重心ニ対スル axiom

C_1 如何ナル図形 $\mathfrak{a}$ ニ対シテモ ソノ重心 $m(\mathfrak{a})$ ナル一点ガ存在シ唯一点ニ限ル.

C_2 合同ナ二ツノ図形ノ重心ハ合同ナ位置ニアル.

C_3 二ツノ図形 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ カラ重複シナイデ合成サレタ図形 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ノ重心 $m(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ ハモトノ図形ノ各重心 $m(\mathfrak{a})$, $m(\mathfrak{b})$ ヲ結ブ直線上ニアル.

C_4 如何ナル図形ニ対シテモソノ重心ノ存在スル有界ナ範囲ガ取レル.

Theorem

直線, 図形ニ $C_1 - C_4$ ヲ充タス点ハ正例定義サレタル重心

(即 $\dfrac{\sum m_i r_i}{\sum m}$ or $x_0 = \dfrac{\iiint x\,dV}{V}$ $y_0 = \dfrac{\iiint y\,dV}{V}$ $z_0 = \dfrac{\iiint z\,dV}{V}$ ニヨル重心)

ト一致スル.

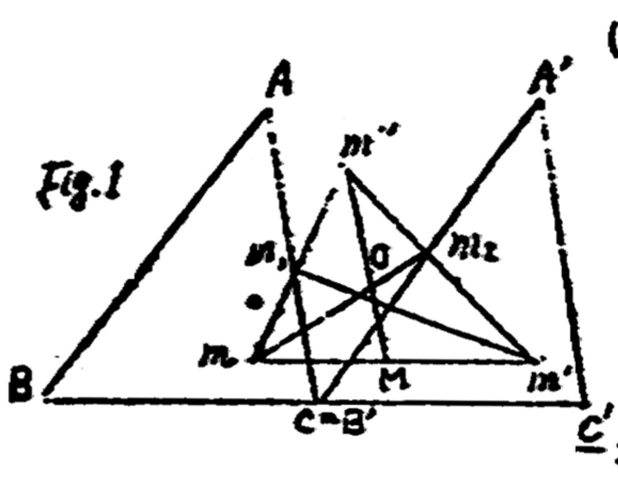
証明

必要ハ trivial. 充分ノ証明ヲ Lemma ヲ重ネタ形デ行ウ.

Lemma 1.

対称図形ハ対称ノ中心(点, 直線, 平面)上ニ重心ガアル. (明カ)

Lemma 2. (平面上)



(証) 図ニ於テ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ナラバ $m(\triangle ABC + \triangle A'B'C')$ ハ $m(\triangle ABC)$ ト $m(\triangle A'B'C')$ トノ中点デアル.

証 図ニ於テ m_1, m_2 ハ AC, AC ノ中点トス.

$m(ABCA) = m_1$,　$m(A'AB'C') = m_2'$

$m(ABC'A') = o$　　$m(ACA') = m''$

$m(ABC + A'B'C') = m''$ ∴ $mm' = M$. (以上)

Lemma 3. (平面上)

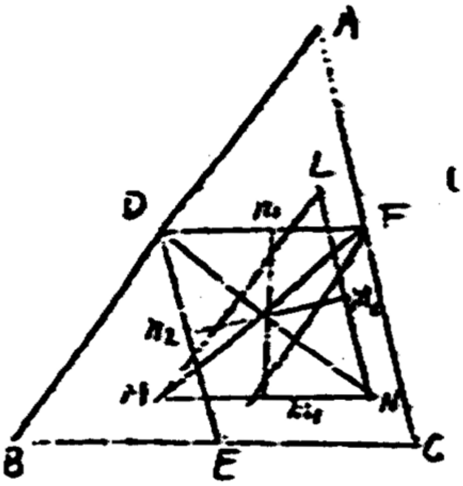


Fig 2

図ニ於テ $m(\triangle CEF) = N$, DハABノ中点トスレバ $m(\triangle ABC)$ハNDノ中点ナリ.

(証) $m(AFD) = L$, $m(BDE) = M$,
$m(CEF) = N$
MN, NLノ中点ヲ m_1, m_2,
FD, EDノ中点ヲ n_1 n_2
$(n_1 m_1 \frown m_2 n_2) = o$ トスルト.
$m(ABC) = o$ トナル.

又 $m_1\ m_2\ n_1\ n_2$ハ平行四辺形カラ

$On_1 = Om_1$　故ニOハND上ニアリ　且 $NO = OD$ (以上)

Lemma 4 (平面上)

三角形ノ重心ハ通常ノ重心ニ一致スル.*

(証) 図ノ如ク各辺ガ$\frac{1}{2}$ノ三角形ヲ頂点Cヲ共通ニ次々ト作リ.
$A'B'C'$, $A''B''C''$,……トシ.
$m(ABC) = O_0$, $m(A'B'C') = O_1$,
以下 O_2. O_3. トスレバ
$DO_0 = O_0O_1$,　$D'O_1 = O_1O_2$,……
トナル. O_0ガ通常ノ重心ト一致シナ

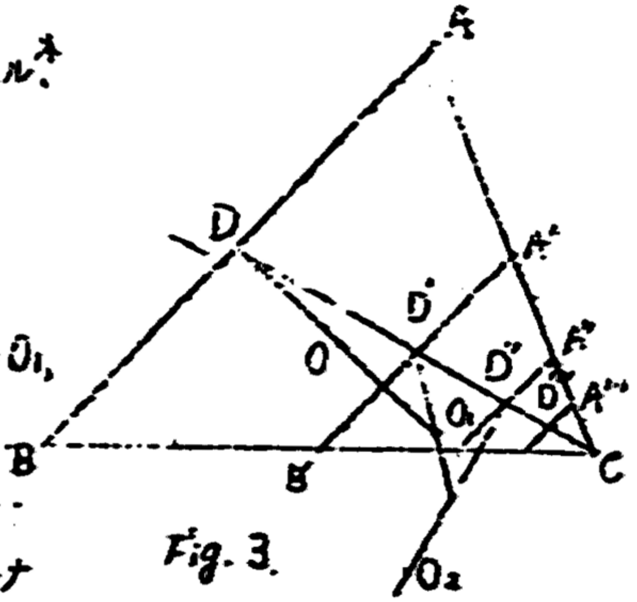


Fig. 3.

ケレバ △ABC △A'B'C' …→C ニツレテ $D^{(n)}O_n$ノ距離ハ無限ニ大トナリ C_aニ反スルコトガ容易ニ証明出来ル.

即 Dヲ原点　DCヲx軸. ソレニ垂直ニy軸　Cヲ$(1, 0)$　$O_n = (x_n, y_n)$ トスレバ.

---

* 相似図形ノ重心ハ相似ノ位置ニアルコトヲ仮定スレバ極メテ簡単ニ証明出来ル.

recursion formulae $\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n \\ x_{n+1} = 2x_n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{cases}$ ヲ得テ

$y_0 \neq 0$ ナラバ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$ トナルカラ $y_0 = 0$ ガ必要. 又 $x_0 \neq \frac{1}{3}$ ナラバ $\lim x_n = \pm\infty$ トナルカラ $x_0 = \frac{1}{3}$ ガ必要 (以上)

Lemma . 5 (立体)

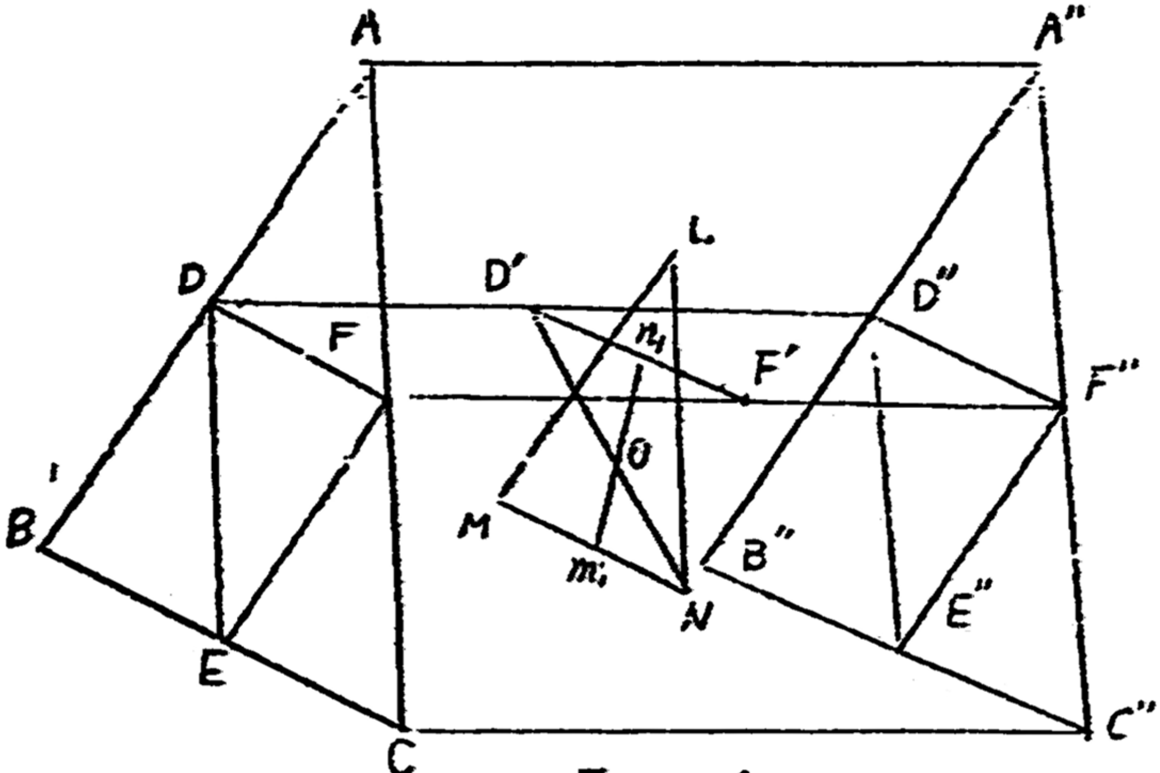


Fig. 4

三角柱ノ重心ハ通常ノ重心ト一致スル。

(証) 三角柱ヲ ▽ ト記ス.

▽ ADF, BDE, CEF ノ重心ヲ L, M, N トスル. DD'' EE'', FF'' ノ中点ヲ D'E'F' トスル.

ΔLMN ノ平面トΔD'E'F'ノ平面ハ平行ニシテ Lemma 3 ト同様ノ方法ヲ使ヘテ ▽ ABC ノ重心ハ ND' ノ中点トナリ. 故ニ Lemma 4 ノ証明ヲ三次元ニ拡張シテ用フレバコノ Lemma ガ証サレル.

Lemma 6. (立体)

以下三角錐ヲ ◈ デ表ハス.

図ニ於テ ◈ABCD ≡ Δ A'B'C'D' ナラバ.

m(◈ABCD + ◈A'B'C'D') ハ m_1(◈ABCD) ト m_2(◈A'B'C'D') トノ中点ニナル。

証. $n_1 n_2 // m_1 m_2$ ヲ用フル外 Lemma 2 ノ証明ト同様ナ方法ニヨレバヨイ.

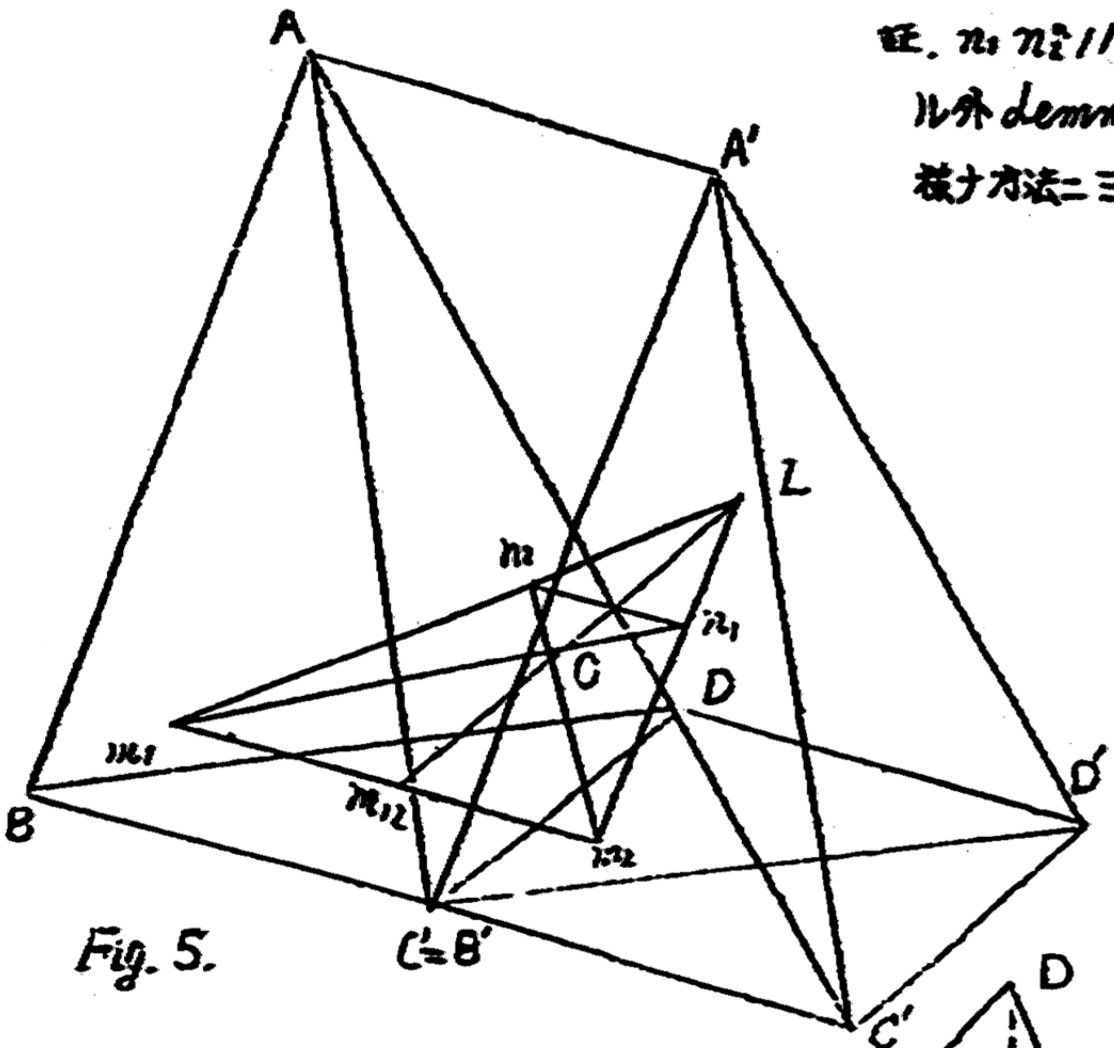


Fig. 5.

Lemma, 7. 三角錐ノ重心ハ頂点ノ重心ト一致スル.

証

(a) 図ニ於テ E,….,K ハ各稜ノ中点トスル.

FH∧EK = m_5 トスル.

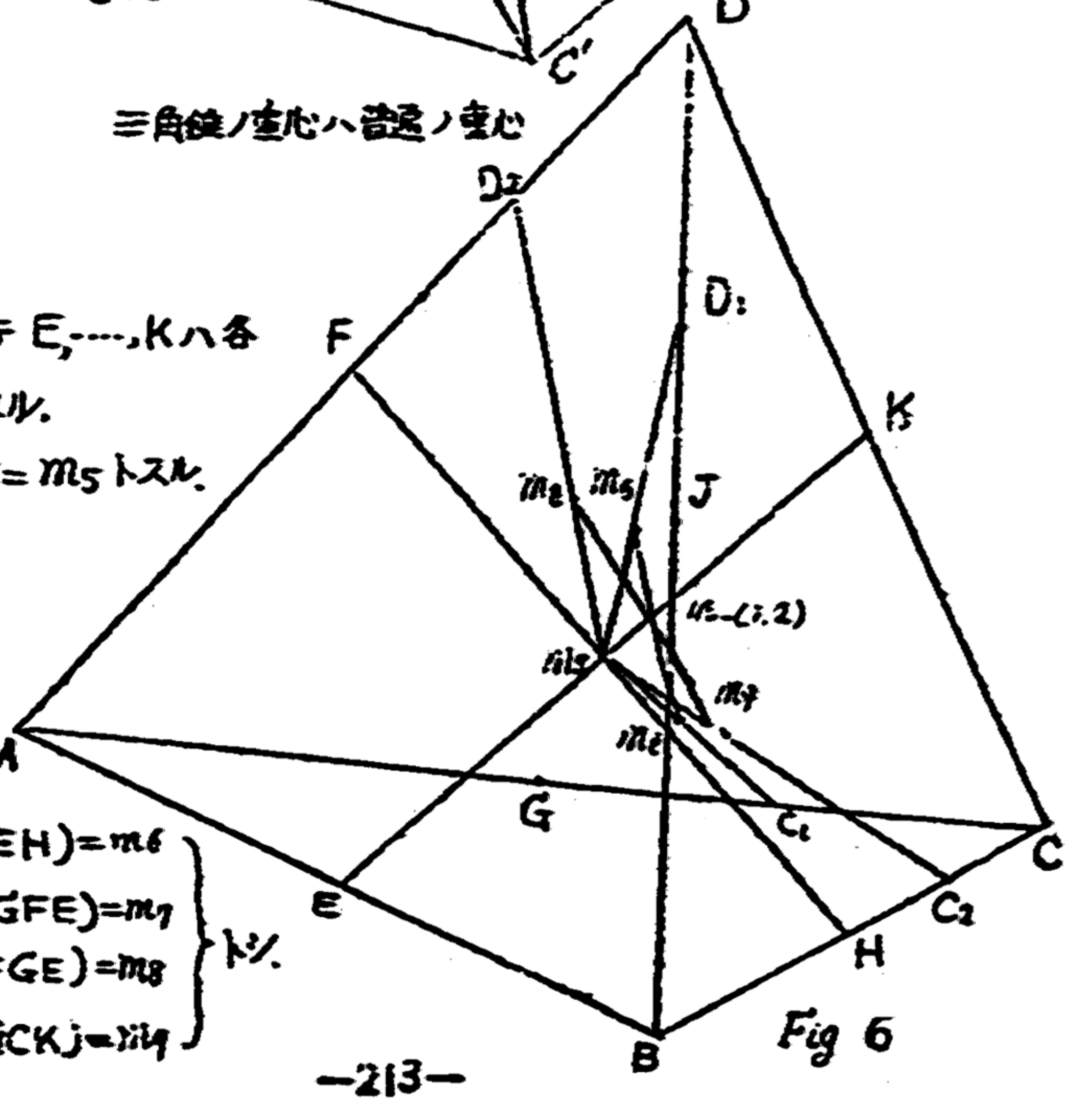


Fig 6

m(⬡DFKJEH) = m_6
m(⬡CKHGFE) = m_7
m(⬡DKJFGE) = m_8
m(⬡EHJGCKJ = m_9

トシ.

又 $m_{-(1,2)}$ ヲ ◇ABCD カラ ◇AEGF ト ◇JEBH トヲ取去ッタ図形ノ重心トスルト

$m_{-(1,2)}=(m_6\cup m_7)\cap(m_8\cup m_9)$ ヲ得ル.

Gauche 四辺形ノ対辺ノ中線ノ定理ニヨリ $m_{-(1,2)}$ ハ m_5K 上ニアリ.

又 Lemma 5 カラ $m_5m_{-(1,2)}=\frac{1}{6}m_5K$ ヲウル.

(b) ◇AEFG, BEJH, CGHK, DFJK, 重心ヲソレゾレ m_1, m_2, m_3, m_4 トシ $m(◇AEFG+◇BEJH)=m_{12}$ トスル.

同様ニ $m_{3,4}$ 又 (a) ト同様ニ $m_{-(3,4)}$ ヲ得.

$$(m_{1,2}\cup m_{-(1,2)})\cap(m_{3,4}\cup m_{-(3,4)})=m_0$$

トスレバ $m_0=m(◇ABCD)$ デアル.

(c)

$m(◇m_1m_2m_3m_4)=m_0'$ トス.

レバ,

m_0' ハ ◇$m_1m_2m_3m_4$ ト ◇ABCD トノ相似ノ中心ニアリ.

又

$(m_{12}\cup m_{34})\cap(m_{14}\cup m_{23})=m_5'$ トスル.

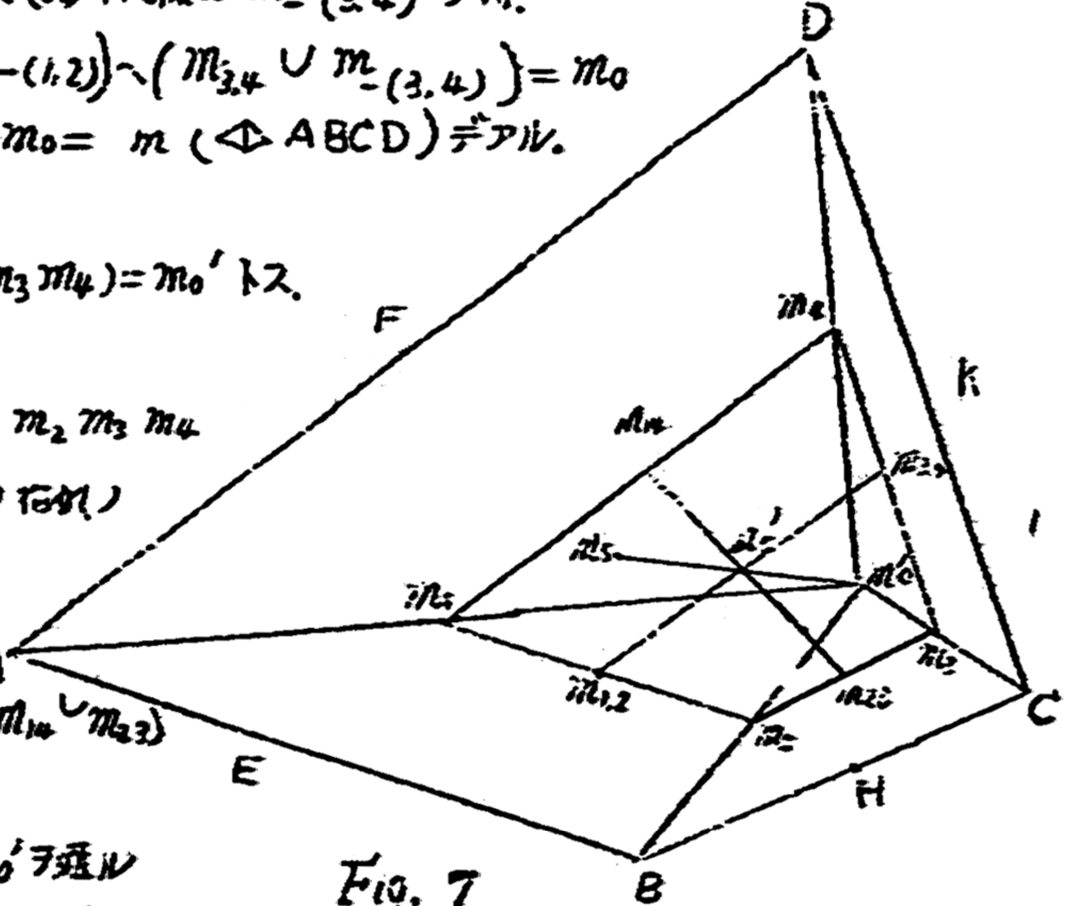


Fig. 7

(d) m_5m_5' ハ m_0' ヲ通ル

又 m_5m_0 ハ m_5' ヲ通ル.

又 $m_5m_5'=m_5'm_0'$ ヲ得ルガ之ヲ $4a$ トオク.

「メネラウスノ定理」ヲ用ヒ

$$\frac{m_5m_0}{m_0m_0'}=\frac{m_5m_{-(1,2)}}{m_{-(1,2)}E}=\frac{1}{7}$$ ヲ得テ.

結局 $m_5m_0=a=\frac{1}{4}(m_5'm_0')$ ガ解リ

$a\neq0$ ナラバ 各種 $\frac{1}{2}$ ノ ◇ヲ次々ト作リ、ソノ重心ト対辺ノ中線ノ交点ヲ $m_5^{(n)}$, $m_0^{(n)}$ トスレバ

$\lim_{i\to\infty} m_{s,}^{(n)} m_0^{(n)} = \infty$ トナリ矛盾
(Lemma 証了)

主定理ノ証明ハ平面ノ場合ニハ必要ナ回数ダケノ異ツタ分解法デ三角形ニ分解シ、重心線ノ交点ヲ求メラレル。

立体ノ場合ニモ 四角錐ノ重心ガ求マル事ヲ考慮スレバ爾余ハ平面ト同様ニ求メ得ル。

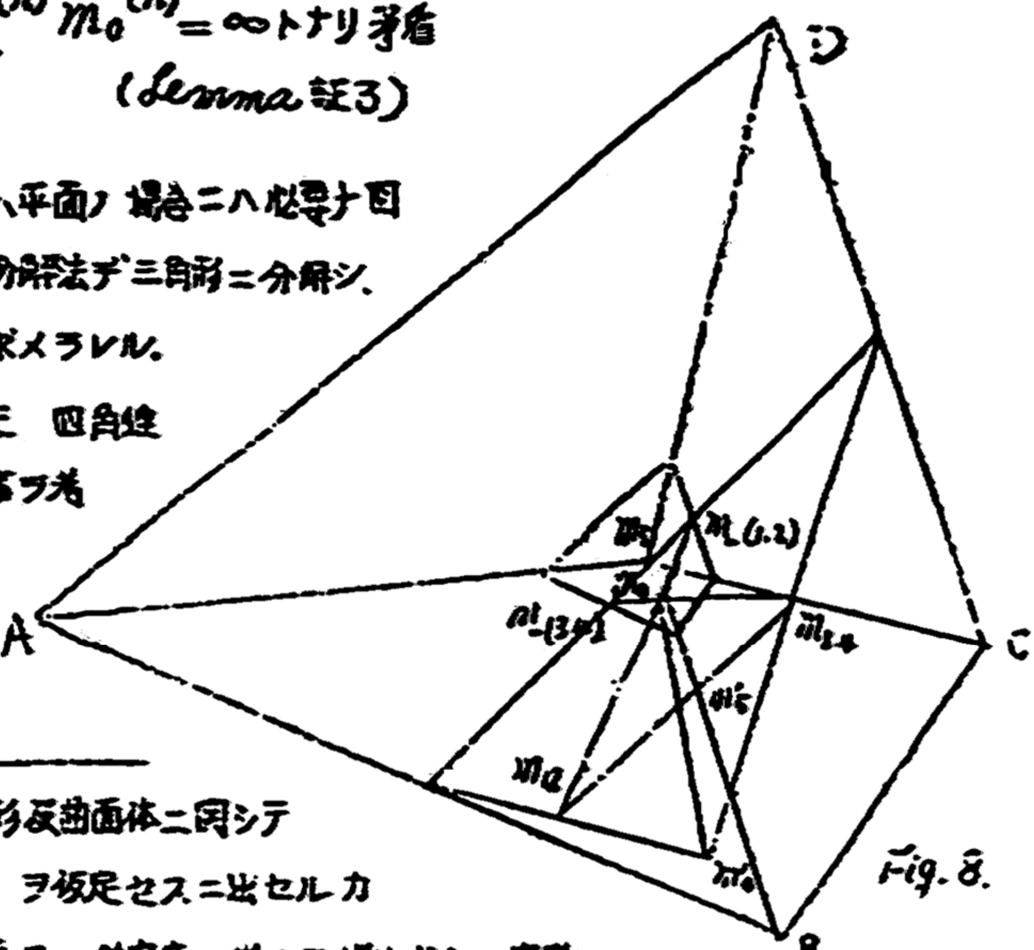


Fig. 8.

一般ノ曲線図形及曲面体ニ関シテ Continuity ヲ仮定セズニ出セルカドウカハマダ判ラヌ。然密度一様ナラザル場合、密度ニ比例シタ高サデ立体ヲ作リ多面形トナル時ハ、ソノ重心ノ射影デ定義出来テ、通例ノ重心ト一致スル。

至極ニ渉リ多クノ適切ナ御教示ヲ頂イタ事ニ対シ寺阪先生ニ深ク感謝ノ意ヲ表スル。

1947. 11. 3